第９講　ベクトル①

【CHECK & UP】

1　各辺の長さが1である正四面体OABCにおいて，線分ABの中点をP，線分OBを2：1に内分する点をQ，線分OCを1：3に内分する点をRとする．また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$とおく．このとき次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ．

(2)　$\angle\mathrm{QPR}=\theta$とするとき，$\cos\theta$の値を求めよ．

2　平面上の3点O，A，Bが$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1$を満たしているとする．このとき次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$および$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$の値を求めよ．

(2)　△OABの面積を求めよ．

(3)　Oから辺ABに下ろした垂線と辺ABとの交点をHとする．$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$を$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$を用いて表せ．また$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$の値を求めよ．

3　△ABCにおいて辺ABを1：3に内分する点をD，辺ACを1：2に内分する点をEとする．直線DEと直線BCの交点をFとするするとき，BC：CFを求めたい．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{DF}}=t\overrightarrow{\mathrm{DE}}$とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}$を$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$t$を用いて表せ．

(2)　以下誘導①，誘導②，誘導③に従ってBC：CFを求めよ．

誘導①　$\overrightarrow{\mathrm{BF}}=s\overrightarrow{\mathrm{BC}}$とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}$を$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$s$を用いて表せ．
また，(1)と比較することにより，s，tの値とBC：CFを求めよ．

誘導②　点Fは直線BC上にある．よって$\overrightarrow{\mathrm{AF}}$を$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$の形で表したとき，$\alpha$と$\beta$にはある関係が成り立つ．その関係式を求めよ．またそのことと(1)を利用し，tの値とBC：CFを求めよ．

誘導③　メネラウスの定理を用いて$\dfrac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}}$の値を求め，$t$の値とBC：CFを求めよ．

4　△ABCにおいて，辺BCを1：4に内分する点をDとする．また，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=k\overrightarrow{\mathrm{AD}}$となる点Eをとる．このとき次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{BE}}$を$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$k$を用いて表せ．

(2)　直線BEと直線ACが平行になるとき，kの値を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　三角形 ABC の 3 辺の長さがそれぞれ AB=3，BC=a，CA=6 であるとする．点 P は

$$a\overrightarrow{\mathrm{PA}}+6\overrightarrow{\mathrm{PB}}+3\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$$

を満たすとする．また，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{x}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{y}$ とおく．

(1)　直線 AP と直線 BC の交点を D とする．$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を $\vec{x}$ と $\vec{y}$ を用いて表すと，それぞれ

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}+\boxed{\text{ウ}}}\vec{x}+\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{イ}}+\boxed{\text{ウ}}}\vec{y}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\vec{x}+\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{カ}}}\vec{y}$$

となる．（$\boxed{\text{イ}}$ と $\boxed{\text{ウ}}$ は解答の順序を問わない．）

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と $\vec{x}$ の内積を求めよう．(1)より　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\vec{x}=\boxed{\text{ク}}+\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{カ}}}\vec{x}\cdot\vec{y}$　である．

また，余弦定理を用いると　$\vec{x}\cdot\vec{y}=\dfrac{\boxed{\text{ケコ}}-a^2}{\boxed{\text{サ}}}$　であるから，求める内積は

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\vec{x}=\frac{\boxed{\text{シス}}-a^2}{\boxed{\text{セ}}}$$

である．

(3)　AD=2 のとき，$a=\boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}}$ である．このとき，点 P から直線 AB に下ろした垂線と直線 AB との交点を H とする．$\overrightarrow{\mathrm{PH}}$ を $\vec{x}$ と $\vec{y}$ で表そう．

$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\vec{x}=\boxed{\text{チ}}$ であるから，実数 t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=t\vec{x}$ と表したとき

$$t=\frac{\boxed{\text{ツ}}-\sqrt{\boxed{\text{テ}}}}{\boxed{\text{ト}}}$$

である．したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=\frac{\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}-\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}\vec{x}+\frac{\sqrt{\boxed{\text{ネ}}}-\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}\vec{y}$$

である．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 平面上に一辺の長さが1である正三角形OPQがある．直線OQに関してPと対称な点をRとし，直線OPに関してQと対称な点をSとする．PSを$a:(1-a)$ $(0<a<1)$ に内分する点をA，ORを$b:(1-b)$ $(0<b<1)$ に内分する点をBとする．ベクトル$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$をそれぞれ$\vec{p}$，$\vec{q}$とおく．

(1) $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$を$\vec{p}$，$\vec{q}$で表すと

$$\overrightarrow{OA}=\vec{p}-\boxed{\text{ア}}\vec{q},\quad \overrightarrow{OB}=-\boxed{\text{イ}}\vec{p}+\boxed{\text{ウ}}\vec{q}$$

であるから，$\overrightarrow{AR}$と$\overrightarrow{BQ}$は

$$\overrightarrow{AR}=-\boxed{\text{エ}}\vec{p}+(\boxed{\text{オ}}+\boxed{\text{カ}})\vec{q}$$

$$\overrightarrow{BQ}=\boxed{\text{キ}}\vec{p}+(\boxed{\text{ク}}-\boxed{\text{ケ}})\vec{q}$$

となる．ただし，$\boxed{\text{オ}}$と$\boxed{\text{カ}}$は解答の順序を問わない．これより

$$\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{BQ}=\frac{1}{\boxed{\text{コ}}}(\boxed{\text{サ}}a-\boxed{\text{シ}}b-ab)$$

である．

(2) 2直線ARとBQが垂直に交わるとする．このとき，bはaを用いて

$$b=\frac{\boxed{\text{ス}}a}{a+\boxed{\text{セ}}}$$

と表される．さらに$a=\frac{1}{2}$とすると

$$|\overrightarrow{AR}|=\frac{\sqrt{\boxed{\text{ソタ}}}}{\boxed{\text{チ}}},\quad |\overrightarrow{BQ}|=\frac{\sqrt{\boxed{\text{ツテ}}}}{\boxed{\text{ト}}}$$

であり，四角形ABRQの面積は

$$\frac{\boxed{\text{ナニ}}\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}}{\boxed{\text{ネノ}}}$$

である．また，2直線ARとBQの交点をCとすると

$$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{\boxed{\text{ハヒ}}}(-\boxed{\text{フ}}\vec{p}+\boxed{\text{ヘホ}}\vec{q})$$

である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 四面体OABCにおいて，$OA=OB=BC=\sqrt{2}$，$OC=CA=AB=\sqrt{3}$ である．
$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$，$\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ とおく．

(1) $|\vec{a}-\vec{b}|^2=$ [ア] であり，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{[イ]}{[ウ]}$ である．

また，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\dfrac{[エ]}{[オ]}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}=$ [カ] である．

(2) 直線AB上の点Pを $\overrightarrow{CP}\cdot\vec{a}=0$ であるようにとると

$$\overrightarrow{CP}=\frac{[キ]}{[ク]}\vec{a}+\frac{[ケ]}{[コ]}\vec{b}-\vec{c}$$

となり，点Pは線分ABを $1:\dfrac{[サ]}{[シ]}$ に内分する．また，$\overrightarrow{CP}\cdot\vec{b}=$ [ス] であり，

$|\overrightarrow{CP}|=\dfrac{\sqrt{[セソ]}}{[タ]}$ である．

$\overrightarrow{CP}$ は三角形 [チ] の各辺と垂直であるから，直線CPは三角形 [チ] を含む平面に垂直である．ただし， [チ] については，当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ．

⓪ ABC　　① OBC　　② OAC　　③ OAB

三角形 [チ] の面積は $\dfrac{\sqrt{[ツテ]}}{[ト]}$ であるから，四面体OABCの体積は $\dfrac{[ナ]}{[ニヌ]}$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第９講　ベクトル①

$\boxed{1}$ a を正の実数とする．三角形 ABC の内部の点 P が

$$5\overrightarrow{\mathrm{PA}}+a\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$$

を満たしているとする．このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{\boxed{\text{ア}}}{a+\boxed{\text{イ}}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{\boxed{\text{ウ}}}{a+\boxed{\text{エ}}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

が成り立つ．

直線 AP と辺 BC との交点 D が辺 BC を 1：8 に内分するならば，$a=\boxed{\text{オ}}$ となり，

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キク}}}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ となる．このとき，点 P は線分 AD を $\boxed{\text{ケ}}:\boxed{\text{コ}}$ に内分する．

さらに，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=2\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\sqrt{10}$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{6}$ ならば

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\boxed{\text{サ}}$$

である．したがって

$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2=\frac{\boxed{\text{シスセ}}}{\boxed{\text{ソタ}}}$$

となる．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 一辺の長さが2の正三角形ABCの3辺AB，BC，CAの中点をそれぞれD，E，Fとする．$0<a<1$として，線分ADを$(1-a):a$に内分する点をO，線分CEを$a:(1-a)$に内分する点をPとし，直線OPと直線EFの交点をQ，直線OPと直線DFの交点をRとする．さらに，$\overrightarrow{AD}=\vec{x}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{y}$とおく．

(1) ベクトル$\vec{x}$，$\vec{y}$は

$$|\vec{x}|=|\vec{y}|=\boxed{ア},\quad \vec{x}\cdot\vec{y}=\frac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}$$

を満たす．

(2) ベクトル$\overrightarrow{OP}$は

$$\overrightarrow{OP}=(\boxed{エオ}-\boxed{カ})\vec{x}+(\boxed{キ}-\boxed{ク})\vec{y}$$

と表される．$\overrightarrow{OP}$の大きさの2乗は

$$|\overrightarrow{OP}|^2=\boxed{ケ}(a^{\boxed{コ}}-\boxed{サ}+\boxed{シ})$$

である．

(3) $\overrightarrow{OQ}$と$\overrightarrow{OR}$を$\overrightarrow{OP}$で表せば

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}-\boxed{ソ}}\overrightarrow{OP},\quad \overrightarrow{OR}=\frac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}+\boxed{ツ}}\overrightarrow{OP}$$

である．（$\boxed{チ}$と$\boxed{ツ}$は解答の順序を問わない.）

(4) $\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OB}$のなす角をθとするとき

$$\cos^2\theta=\frac{\boxed{テ}a^2}{\boxed{ト}(a^{\boxed{コ}}-\boxed{サ}+\boxed{シ})}$$

である．$\theta=45^\circ$のとき，aの値は$a=\boxed{ナニ}+\sqrt{\boxed{ヌ}}$である．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　OP＝1，OQ＝2，∠POQ＝90° である三角形 OPQ において，線分 OP を 2：1 に内分する点を L，線分 OQ を a：$(1-a)$ に内分する点を M とする．さらに，線分 PQ 上に点 N を ∠LMN＝90° となるようにとる．$\overrightarrow{OP}=\vec{p}$，$\overrightarrow{OQ}=\vec{q}$ とおき，PN：NQ＝b：$(1-b)$ とする．ただし，$0<a<1$，$0<b<1$ とする．

(1)　$\overrightarrow{ML}$ と $|\overrightarrow{ML}|$ は a を用いて

$$\overrightarrow{ML}=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\vec{p}-\boxed{ウ}\,\vec{q},\quad |\overrightarrow{ML}|=\frac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}\sqrt{1+\boxed{カ}\,a^2}$$

と表される．

(2)　$|\overrightarrow{MN}|$ を a を用いて表そう．まず，$\overrightarrow{MN}$ は a，b を用いて

$$\overrightarrow{MN}=(1-\boxed{キ})\vec{p}+(\boxed{ク}-\boxed{ケ})\vec{q}$$

と表される．$\overrightarrow{ML}\cdot\overrightarrow{MN}=\boxed{コ}$ であるから，$b=\dfrac{1+\boxed{サ}\,a^2}{\boxed{シ}+\boxed{ス}\,a}$ である．

したがって，$|\overrightarrow{MN}|$ は a を用いて

$$|\overrightarrow{MN}|=\frac{\boxed{セ}(\boxed{ソ}-a)}{\boxed{シ}+\boxed{ス}\,a}\sqrt{1+\boxed{タ}\,a^2}$$

と表される．

(3)　三角形 LMN と三角形 QOP は相似であるとする．直線 OQ と直線 LN の交点を求めよう．

$$|\overrightarrow{ML}|=\boxed{チ}\,|\overrightarrow{MN}| \text{ であるから，} a=\frac{\boxed{ツ}}{\boxed{テト}},\quad b=\frac{\boxed{ナ}}{\boxed{ニヌ}} \text{ である．}$$

s を実数とし，直線 LN 上に点 R を $\overrightarrow{LR}=s\overrightarrow{LN}$ となるようにとる．$\overrightarrow{OR}$ は s を用いて

$$\overrightarrow{OR}=\left(\frac{\boxed{ネ}}{\boxed{ノ}}-\frac{s}{\boxed{ハ}}\right)\vec{p}+\frac{\boxed{ナ}}{\boxed{ニヌ}}s\vec{q}$$

と表される．

$s=\dfrac{\boxed{ヒ}}{\boxed{フ}}$ のとき，R は，直線 OQ 上の点でもあるので，直線 OQ と直線 LN の交点となる．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

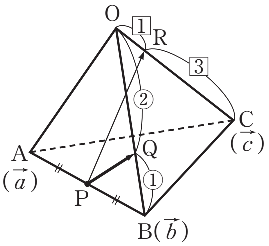
第９講　ベクトル①

【CHECK & UP】

1　$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}$

$=1\cdot1\cdot\cos60^\circ=\dfrac{1}{2}$



> まずは扱うベクトルのそれぞれの「大きさ」とその内の２つの「内積」を出すところから開始．大きさと内積から派生していく．平面なら２つ，空間なら３つのベクトルが標準的．次に，上のベクトルと「始点が異なる」場合は「分割」をし始点替えを行う．結果「引き算の形」となる．その後，「伸縮」「分点」の知識を使うことで，新しいベクトルは上のベクトルの実数倍，和・差の形 $\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}$ として表せる．この形を１次結合という．
> 「分点」について，例えば AB を 1：2 に内分する点 P を表すベクトルは $\dfrac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$ と表せるが，これを $\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$ のように最初から分けておきたい．今後同じベクトルをまとめたり，内積の計算に役立ったりで便利である．また，「係数の和が 1」と認識できることも後に役立つ．

(1)　$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$

$=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OB}-\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$

$=\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{6}\vec{b}}$

$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}$

$=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{OC}-\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)=\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{4}\vec{c}}$

(2)　$\overrightarrow{PQ}=-\dfrac{1}{6}(3\vec{a}-\vec{b})$　$\overrightarrow{PR}=-\dfrac{1}{4}(2\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c})$ より

$|\overrightarrow{PQ}|^2=\left(\dfrac{1}{6}\right)^2|3\vec{a}-\vec{b}|^2=\dfrac{1}{6^2}(9|\vec{a}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2)$

$=\dfrac{1}{6^2}(9-3+1)=\dfrac{7}{6^2}$

$|\overrightarrow{PR}|^2=\left(\dfrac{1}{4}\right)^2|2\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}|^2=\dfrac{1}{4^2}(4|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+8\vec{a}\cdot\vec{b}-4\vec{b}\cdot\vec{c}-4\vec{c}\cdot\vec{a})$

$=\dfrac{1}{4^2}(4+4+1+4-2-2)=\dfrac{9}{4^2}$

> １次結合で表された「ベクトルの大きさ」は，「２乗」することで上の基本ベクトルの「内積計算」に持ち込むことができる．このことは内積の定義
> $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}||\vec{a}|\cos0^\circ=|\vec{a}|^2$ を右から読むことで得られるであろう．
> ここで大きさを求めたいベクトルにおいて，左の解答のように「くくりだし」を行ってから２乗すると，分数にとらわれることなく効果的に計算ができ楽であることが多い．これは１次結合の形で表された２つのベクトルの「内積計算」においても同じである．

よって　$|\overrightarrow{PQ}|=\dfrac{\sqrt{7}}{6}$　　$|\overrightarrow{PR}|=\dfrac{3}{4}$

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=\dfrac{1}{24}(3\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c})$

$=\dfrac{1}{24}(6|\vec{a}|^2+6\vec{a}\cdot\vec{b}-3\vec{a}\cdot\vec{c}-2\vec{a}\cdot\vec{b}-2|\vec{b}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c})$

$=\dfrac{1}{24}\left(6+3-\dfrac{3}{2}-1-2+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{5}{24}$

ゆえに　$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{PR}|}=\dfrac{\frac{5}{24}}{\frac{\sqrt{7}}{6}\cdot\frac{3}{4}}=\dfrac{5}{3\sqrt{7}}=\boldsymbol{\dfrac{5\sqrt{7}}{21}}$

2　$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とおく

(1)　$|\vec{a}+\vec{b}|=1$ より　$|\vec{a}+\vec{b}|^2=1$　　$|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=1$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$|\vec{a}|=1$ より　$2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=0$　……①

$|2\vec{a}+\vec{b}|=1$　より　$|2\vec{a}+\vec{b}|^2=1$　　$4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=1$

よって　$4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=-3$　……②

①−② より　$-2\vec{a}\cdot\vec{b}=3$　　ゆえに　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\boldsymbol{-\frac{3}{2}}$

このとき，①より　$|\vec{b}|^2=3$　　ゆえに　$|\vec{b}|=\boldsymbol{\sqrt{3}}$

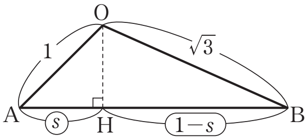
三角形の面積においても，２つのベクトルの「大きさ」と「内積」により計算可能である．これは三角比において三角形の面積が「２辺とその間の角」が分かれば計算できるのとイメージがかぶるであろう．ご存じの人もいるであろうが，ベクトルにおける三角形の面積公式は，「余弦定理」を適用して証明することが可能である．

(2)　$\triangle OAB=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2\times|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{1\times3-\frac{9}{4}}$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{4}}$

(3)　H は辺 AB 上の点より，

$\overrightarrow{OH}=(1-s)\vec{a}+s\vec{b}$　$(0<s<1)$　とおくことができる．



$OH\perp AB$ より　$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$　　$\{(1-s)\vec{a}+s\vec{b}\}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$

$(1-s)\vec{a}\cdot\vec{b}-(1-s)|\vec{a}|^2+s|\vec{b}|^2-s\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$-\frac{3}{2}(1-s)-(1-s)+3s+\frac{3}{2}s=0$　　$s=\frac{5}{14}$

ゆえに　$\overrightarrow{OH}=\frac{9}{14}\vec{a}+\frac{5}{14}\vec{b}=\boldsymbol{\frac{1}{14}(9\vec{a}+5\vec{b})}$

ここで　$|9\vec{a}+5\vec{b}|^2=81|\vec{a}|^2+90\vec{a}\cdot\vec{b}+25|\vec{b}|^2$

$=81-135+75=21$　より

$|\overrightarrow{OH}|=\boldsymbol{\frac{\sqrt{21}}{14}}$

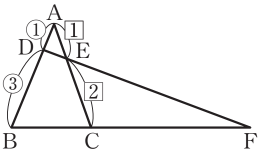
分点を表すベクトルを表現するとき，その比がわからない場合は，最初から「和が１となるよう」$s:(1-s)$ などとおくことで左のように表すことができる．
また，垂直すなわち内積 0 であることはあまりに有名．ここで内積計算において分配法則的な計算を行う際，同じベクトルや内積でまとめる必要はない．なぜならば，分配した後に基本ベクトルの「大きさ」「内積」を代入し，「パラメーターごとに」まとめて行く必要があるからだ．

3　(1)　$\overrightarrow{DF}=t\overrightarrow{DE}$ より　$\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AD}=t(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD})$

よって　$\overrightarrow{AF}=(1-t)\overrightarrow{AD}+t\overrightarrow{AE}$

$=(1-t)\cdot\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+t\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

$=\boldsymbol{\frac{1}{4}(1-t)\overrightarrow{AB}+\frac{t}{3}\overrightarrow{AC}}$



ある直線上に新たに点を設定したとき，「分点」と「伸縮」のどちらを選択するかを取捨選択しなければならない．しかしながらセンター試験では時に与えられたものから開始して進める必要がある．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2) 誘導① $\overrightarrow{BF}=s\overrightarrow{BC}$ より $\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}=s(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$

よって　$\overrightarrow{AF}=(1-s)\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ は１次独立より

$$\begin{cases}\dfrac{1}{4}(1-t)=1-s \\ \dfrac{t}{3}=s\end{cases}\qquad \begin{cases}s=3 \\ t=9\end{cases}$$

よって　$\overrightarrow{BF}=3\overrightarrow{BC}$ より　BC：CF＝**1：2**

> 誘導①は，(1)と同じく伸縮で表されたベクトルを分割し，分点を表す形に変換し，(1)と比較した．「1次独立」すなわち2ベクトルが平行でなく0ベクトル（長さ0のベクトル）でもないことは図形的に明確．よって $\vec{a}$，$\vec{b}$ のそれぞれの係数を比較することができる．最後は伸縮率より比を出した．

誘導② 点Fが直線BC上にあるとき，

$\overrightarrow{AF}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ に関して $\boldsymbol{\alpha+\beta=1}$ が成り立つ．

よって　$\overrightarrow{AF}=\dfrac{1}{4}(1-t)\overrightarrow{AB}+\dfrac{t}{3}\overrightarrow{AC}$　において

$\dfrac{1}{4}(1-t)+\dfrac{t}{3}=1$　　$t=\mathbf{9}$

このとき　$\overrightarrow{AF}=-2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$　より

FはBCを3：2に外分する点である．

ゆえに　BC：CF＝**1：2**

> 誘導②は，(1)の分点の式でそのまま $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ の前の数字を「たして1」にすれば t がわかる，というもの．ただしこの t は「$\overrightarrow{DE}$ をどれだけ伸ばせばよいのか」を表したもの．よってBC：CFを求めるためには分点の形の式に代入しなければならない．ちなみに，$\overrightarrow{AB}$ の前の数字に「マイナス」がついているため，BからCの方向へ3行くときにCを「飛び越し」，その後Bの方向に「戻る」．外分の式を立式することは少ないが練習しておくことが理解のために望ましい．

誘導③ メネラウスの定理により　$\dfrac{BF}{FC}\cdot\dfrac{CE}{EA}\cdot\dfrac{AD}{DB}=1$

つまり　$\dfrac{BF}{FC}\cdot\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{1}{3}=1$　　よって　$\dfrac{BF}{FC}=\mathbf{\dfrac{3}{2}}$

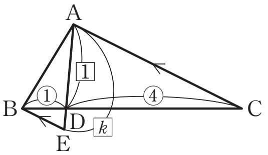
ゆえに　BC：CF＝**1：2**

> BC：CFを出すだけならこの定理を用いればベクトルは不必要．この定理は数学A「平面図形」の範囲である．よってこれを利用できる問題はセンター数学のベクトルでは激減した．同様，「三角形の面積比」も平面図形とみなされるためか同じく出題が激減した．

4 (1) $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AD}$

$=-\overrightarrow{AB}+k\left(\dfrac{4}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AC}\right)$

$=\boldsymbol{-\left(1-\dfrac{4}{5}k\right)\overrightarrow{AB}+\dfrac{k}{5}\overrightarrow{AC}}$



(2) BE∥ACより　$\overrightarrow{BE}=t\overrightarrow{AC}$ と表される．

$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ は１次独立より

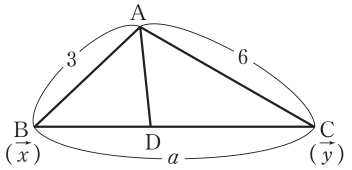
$1-\dfrac{4}{5}k=0$　　よって　$k=\mathbf{\dfrac{5}{4}}$

> 「伸縮」で与えられているため，「たどり」で $\overrightarrow{BE}$ を出した．これは最初のたどりで「始点」Aに簡単に戻れたためである．そうでなければ「分割」の方が早い．
> この問題は「三角形の相似」を用いれば k は簡単に出る．この問題で確認すべきは，１次結合の形で表した後に，条件より「一方のベクトルのみ」で表せる，すなわちもう一方のベクトルの前の係数が「0」となるという流れ．空間図形にも応用できる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

【講義問題　解答例】※記述式における模範解答ではありません．授業を補完するものです．

1　三角形の成立条件より　$3<a<9$



(1)　$a\overrightarrow{\mathrm{PA}}+6\overrightarrow{\mathrm{PB}}+3\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ より

$$-a\overrightarrow{\mathrm{AP}}+6(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+3(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})=\vec{0}$$

$$(a+9)\overrightarrow{\mathrm{AP}}=6\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{\mathbf{6}}{\boldsymbol{a}+\mathbf{9}}\vec{x}+\frac{3}{a+9}\vec{y}=\frac{9}{a+9}\left(\frac{2}{3}\vec{x}+\frac{1}{3}\vec{y}\right)$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\vec{x}+\frac{\mathbf{1}}{3}\vec{y}=\frac{1}{3}(2\vec{x}+\vec{y})$ であり，点Dは線分BCを$1:2$に内分する点である．

(2)　(1)より　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\vec{x}=\left(\frac{2}{3}\vec{x}+\frac{1}{3}\vec{y}\right)\cdot\vec{x}=\frac{2}{3}|\vec{x}|^2+\frac{1}{3}\vec{x}\cdot\vec{y}=\mathbf{6}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\vec{x}\cdot\vec{y}$

また　$\vec{x}\cdot\vec{y}=\frac{9+36-a^2}{2}=\frac{\mathbf{45}-a^2}{\mathbf{2}}$　より　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\vec{x}=6+\frac{1}{3}\cdot\frac{45-a^2}{2}=\frac{\mathbf{81}-a^2}{\mathbf{6}}$

(3)　$\mathrm{AD}=2$ より　$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=2$

つまり　$\frac{1}{3}|2\vec{x}+\vec{y}|=2$　　$|2\vec{x}+\vec{y}|=6$　　$4|\vec{x}|^2+4\vec{x}\cdot\vec{y}+|\vec{y}|^2=36$

$36+4\cdot\frac{45-a^2}{2}+36=36$　　$a^2=63$　　よって　$a=\mathbf{3}\sqrt{\mathbf{7}}$　　このとき　$\vec{x}\cdot\vec{y}=-9$

$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\perp\vec{x}$ より $\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\vec{x}=\mathbf{0}$　すなわち　$(\overrightarrow{\mathrm{AH}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})\cdot\vec{x}=0$

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=t\vec{x}$ とおくと　$\left(t\vec{x}-\frac{2}{\sqrt{7}+3}\vec{x}-\frac{1}{\sqrt{7}+3}\vec{y}\right)\cdot\vec{x}=0$

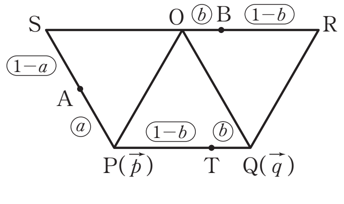
$t|\vec{x}|^2-\frac{2}{3+\sqrt{7}}|\vec{x}|^2-\frac{1}{3+\sqrt{7}}\vec{x}\cdot\vec{y}=0$　　$9t-\frac{2}{3+\sqrt{7}}\cdot9-\frac{1}{3+\sqrt{7}}\cdot(-9)=0$

よって　$t=\frac{1}{3+\sqrt{7}}=\frac{\mathbf{3}-\sqrt{\mathbf{7}}}{\mathbf{2}}$　　したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=\frac{1}{3+\sqrt{7}}\vec{x}-\frac{2}{3+\sqrt{7}}\vec{x}-\frac{1}{3+\sqrt{7}}\vec{y}$$

$$=-\frac{1}{3+\sqrt{7}}\vec{x}-\frac{1}{3+\sqrt{7}}\vec{y}=\frac{\sqrt{\mathbf{7}}-\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\vec{x}+\frac{\sqrt{\mathbf{7}}-\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\vec{y}$$

2　(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\vec{p}-\boldsymbol{a}\vec{q}$



$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=b\overrightarrow{\mathrm{OR}}=b(\vec{q}-\vec{p})=-\boldsymbol{b}\vec{p}+\boldsymbol{b}\vec{q}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\overrightarrow{\mathrm{AS}}+\overrightarrow{\mathrm{SR}}=-(1-a)\vec{q}+2(\vec{q}-\vec{p})$$

$$=-\mathbf{2}\vec{p}+(\boldsymbol{a}+\mathbf{1})\vec{q}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\boldsymbol{b}\vec{p}+(\mathbf{1}-\boldsymbol{b})\vec{q}$$

ここで　$|\vec{p}|=|\vec{q}|=1$，$\vec{p}\cdot\vec{q}=1\cdot1\cdot\cos60°=\frac{1}{2}$ より

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=\{-2\vec{p}+(a+1)\vec{q}\}\cdot\{b\vec{p}+(1-b)\vec{q}\}$$

$$=-2b\cdot 1^2-2(1-b)\cdot\frac{1}{2}+(a+1)b\cdot\frac{1}{2}+(a+1)(1-b)\cdot 1^2$$

$$=\frac{1}{2}(-4b-2+2b+ab+b+2a-2ab+2-2b)=\mathbf{\frac{1}{2}(2a-3b-ab)}$$

(2)　AR⊥BQ より　$\overrightarrow{\mathrm{AR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=0$　　$2a-3b-ab=0$　　$(a+3)b=2a$

よって　$b=\mathbf{\dfrac{2a}{a+3}}$

$a=\dfrac{1}{2}$ のとき　$b=\dfrac{1}{\frac{1}{2}+3}=\dfrac{2}{7}$

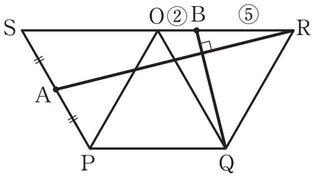
$$|\overrightarrow{\mathrm{AR}}|^2=\left|-2\vec{p}+\frac{3}{2}\vec{q}\right|^2=4\cdot 1^2-6\cdot\frac{1}{2}+\frac{9}{4}\cdot 1^2=\frac{13}{4}$$　ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{AR}}|=\mathbf{\dfrac{\sqrt{13}}{2}}$

$$|\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|^2=\left|\frac{2}{7}\vec{p}+\frac{5}{7}\vec{q}\right|^2=\left(\frac{1}{7}\right)^2|2\vec{p}+5\vec{q}|^2=\left(\frac{1}{7}\right)^2\left(4+20\cdot\frac{1}{2}+25\right)=\frac{39}{7^2}$$

ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|=\mathbf{\dfrac{\sqrt{39}}{7}}$

$$(\text{四角形 ABRQ})=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AR}\cdot\mathrm{BQ}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{13}}{2}\cdot\frac{\sqrt{39}}{7}=\mathbf{\frac{13\sqrt{3}}{28}}$$

AR と BQ の交点 C について



C が AR 上より　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AR}}$

$$=\vec{p}-\frac{1}{2}\vec{q}+s\left(-2\vec{p}+\frac{3}{2}\vec{q}\right)$$

$$=(1-2s)\vec{p}+\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}s\right)\vec{q}$$

C が BQ 上より　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$

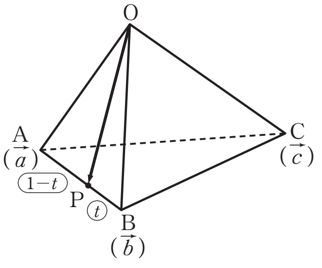
$$=-\frac{2}{7}\vec{p}+\frac{2}{7}\vec{q}+t\left(\frac{2}{7}\vec{p}+\frac{5}{7}\vec{q}\right)$$

$$=\left(-\frac{2}{7}+\frac{2}{7}t\right)\vec{p}+\left(\frac{2}{7}+\frac{5}{7}t\right)\vec{q}$$

$\vec{p}$, $\vec{q}$ は１次独立より　$1-2s=-\dfrac{2}{7}+\dfrac{2}{7}t$, $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}s=\dfrac{2}{7}+\dfrac{5}{7}t$

よって　$s=\dfrac{8}{13}$　$\left(t=\dfrac{5}{26}\right)$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\mathbf{\dfrac{1}{26}(-6\vec{p}+11\vec{q})}$



3　(1)　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2=\mathbf{3}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{2+2-3}{2}=\mathbf{\dfrac{1}{2}}$　　$\vec{b}\cdot\vec{c}=\dfrac{2+3-2}{2}=\mathbf{\dfrac{3}{2}}$

$\vec{c}\cdot\vec{a}=\dfrac{3+2-3}{2}=\mathbf{1}$　　$|\vec{a}|=|\vec{b}|=\sqrt{2}$　　$|\vec{c}|=\sqrt{3}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$ とおく

$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\vec{a}=0$ より $(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\vec{c})\cdot\vec{a}=0$

$\{t\vec{a}+(1-t)\vec{b}-\vec{c}\}\cdot\vec{a}=0$　　$2t+(1-t)\cdot\dfrac{1}{2}-1=0$　　$t=\dfrac{1}{3}$

ゆえに $\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}\vec{a}+\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}\vec{b}-\vec{c}$ であり，点 P は線分 AB を 2：1＝1：$\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$ に内分する．

このとき $\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\vec{b}=\left(\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}-\vec{c}\right)\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}\cdot2-\dfrac{3}{2}=\dfrac{1+8-9}{6}=\mathbf{0}$ より

よって $\overrightarrow{\mathrm{CP}}\perp\vec{b}$ である．これと $\overrightarrow{\mathrm{CP}}\perp\vec{a}$ であることより，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\perp$平面 **OAB**

$$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2=\frac{1}{3^2}|\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}|^2=\frac{1}{3^2}\left(2+4\times2+9\times3+2\times2\times\frac{1}{2}-2\times6\times\frac{3}{2}-2\times3\times1\right)$$
$$=\frac{15}{3^2}$$

より $|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{15}}{3}}$

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2\cdot2-\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{16-1}}{2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{15}}{4}}$$

四面体 OABC の体積は $\dfrac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{OAB}\cdot\mathrm{CP}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{3}=\boldsymbol{\dfrac{5}{12}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第９講　ベクトル①

1　$5\overrightarrow{PA}+a\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ より

$-5\overrightarrow{AP}+a(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})+(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})=\vec{0}$　　　$(a+6)\overrightarrow{AP}=a\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

（P は △ABC の内部の点より　$a>0$　すなわち　$a+6\neq 0$，$a+1\neq 0$　であるから）

$$\overrightarrow{AP}=\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a+6}}\overrightarrow{AB}+\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{a+6}}\overrightarrow{AC}=\frac{a+1}{a+6}\left(\frac{a}{a+1}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{a+1}\overrightarrow{AC}\right)$$

よって，直線 AP と辺 BC との交点を D とすると，$\overrightarrow{AD}=\dfrac{a}{a+1}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{a+1}\overrightarrow{AC}$　であり，

点 D は辺 BC を $1:a$ に内分する．

点 D が辺 BC を $1:8$ に内分するならば，（$1:a=1:8$ より）　$a=\boldsymbol{8}$ となり，

$\overrightarrow{AP}=\dfrac{\boldsymbol{9}}{\boldsymbol{14}}\overrightarrow{AD}$　となる．このとき点 P は線分 AD を **9：5** に内分する．

さらに，$|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{10}$，$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{6}$　ならば

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{6})^2-(\sqrt{10})^2}{2}=\frac{8+6-10}{2}=\boldsymbol{2}\quad \text{である．}$$

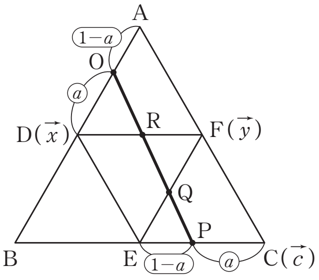
$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とおくと　$\overrightarrow{AP}=\dfrac{8}{14}\vec{b}+\dfrac{1}{14}\vec{c}=\dfrac{1}{14}(8\vec{b}+\vec{c})$

したがって

$$|\overrightarrow{AP}|^2=\frac{1}{14^2}|8\vec{b}+\vec{c}|^2=\frac{1}{14^2}(64|\vec{b}|^2+16\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2)=\frac{1}{14^2}(64\times 8+16\times 2+6)$$

$$=\frac{550}{14^2}=\frac{275}{14\times 7}=\frac{\boldsymbol{275}}{\boldsymbol{98}}$$

2　(1)　$|\vec{x}|=|\vec{y}|=\boldsymbol{1}$，$\vec{x}\cdot\vec{y}=1\times 1\times\cos 60^\circ=\dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}$



(2)　$\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AD}=\vec{y}-\vec{x}$

よって　$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EP}$

$=a\vec{x}+\vec{y}+(1-a)(\vec{y}-\vec{x})$

$=(\boldsymbol{2a-1})\vec{x}+(\boldsymbol{2-a})\vec{y}$

$|\overrightarrow{OP}|^2=(2a-1)^2|\vec{x}|^2+2(2a-1)(2-a)\vec{x}\cdot\vec{y}+(2-a)^2|\vec{y}|^2$

$=(2a-1)^2+(2a-1)(2-a)+(2-a)^2=3a^2-3a+3=\boldsymbol{3(a^2-a+1)}$

(3)　$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}=(2a-1)k\vec{x}+(2-a)k\vec{y}$　……①　とおける．

また　$FQ:QE=t:(1-t)$　とおくと

$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FQ}=-(1-a)\vec{x}+\vec{y}+t\vec{x}=(a+t-1)\vec{x}+\vec{y}$　……②

$\vec{x}$，$\vec{y}$ は１次独立より，①②から

$(2a-1)k=a+t-1$，$(2-a)k=1$　　ゆえに　$k=\dfrac{1}{2-a}$，$t=\dfrac{a^2-a+1}{2-a}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}-\boldsymbol{a}}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=m\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(2a-1)m\vec{x}+(2-a)m\vec{y}$　……③　とおける.

$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-a)\vec{x}+(2a-1)m\vec{x}+(2-a)m\vec{y}$

$=\{(1-a)+(2a-1)m\}\vec{x}+(2-a)m\vec{y}$

D, R, F は一直線上より　$\{(1-a)+(2a-1)m\}+(2-a)m=1$　　$m=\dfrac{a}{a+1}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}+\mathbf{1}}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$

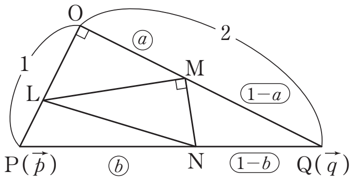
(4)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角，すなわち $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\vec{x}$ のなす角 θ について

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{x}=\{(2a-1)\vec{x}+(2-a)\vec{y}\}\cdot\vec{x}=(2a-1)+\dfrac{1}{2}(2-a)=\dfrac{3}{2}a$　より

$(\cos\theta)^2=\left(\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{x}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\vec{x}|}\right)^2=\dfrac{\frac{9}{4}a^2}{3(a^2-a+1)\times1}=\dfrac{\mathbf{3}a^2}{\mathbf{4}(a^2-a+1)}$

$\theta=45^\circ$ のとき　$\dfrac{3a^2}{4(a^2-a+1)}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$　　$a^2+2a-2=0$

ゆえに　$a=\mathbf{-1}+\sqrt{\mathbf{3}}$　(>0)



3　(1)　$\overrightarrow{\mathrm{ML}}=\overrightarrow{\mathrm{OL}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\vec{p}-\boldsymbol{a}\vec{q}=\dfrac{1}{3}(2\vec{p}-3a\vec{q})$

また，$|\vec{p}|=1$，$|\vec{q}|=2$，$\vec{p}\cdot\vec{q}=0$ より

$|\overrightarrow{\mathrm{ML}}|^2=\dfrac{1}{3^2}|2\vec{p}-3a\vec{q}|^2=\dfrac{1}{3^2}(4\times1^2+9a^2\times2^2)$

$=\dfrac{4(1+9a^2)}{3^2}$

ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{ML}}|=\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\sqrt{1+\mathbf{9}a^2}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}=(1-b)\vec{p}+b\vec{q}-a\vec{q}=(1-\boldsymbol{b})\vec{p}+(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\vec{q}$

また　$\overrightarrow{\mathrm{ML}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MN}}=0$ より

$\dfrac{1}{3}(2\vec{p}-3a\vec{q})\cdot\{(1-b)\vec{p}+(b-a)\vec{q}\}=0$

$2(1-b)\times1-3a(b-a)\times4=0$　　$(1+6a)b=1+6a^2$　　ゆえに　$b=\dfrac{1+\mathbf{6}a^2}{\mathbf{1}+\mathbf{6}a}$

$1-b=1-\dfrac{1+6a^2}{1+6a}=\dfrac{6a-6a^2}{1+6a}=\dfrac{6a(1-a)}{1+6a}$　　$b-a=\dfrac{1+6a^2}{1+6a}-a=\dfrac{1-a}{1+6a}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\dfrac{1-a}{1+6a}(6a\vec{p}+\vec{q})$　より

$|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|^2=\left(\dfrac{1-a}{1+6a}\right)^2(36a^2\times1+4)=\left(\dfrac{1-a}{1+6a}\right)^2\times4(1+9a^2)$

ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|=\dfrac{\mathbf{2}(\mathbf{1}-a)}{1+6a}\sqrt{1+\mathbf{9}a^2}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(3)　$\triangle$LMN∽$\triangle$QOP より　MN：ML＝OP：OQ＝1：2

よって　$|\overrightarrow{\mathrm{ML}}|=2|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|$　であるから

$$\frac{2}{3}\sqrt{1+9a^2}=2\times\frac{2(1-a)}{1+6a}\sqrt{1+9a^2}\qquad 1+6a=6(1-a)\qquad a=\mathbf{\frac{5}{12}},\ b=\mathbf{\frac{7}{12}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{LR}}=s\overrightarrow{\mathrm{LN}}$　より　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OL}}=s(\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\overrightarrow{\mathrm{OL}})$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OL}}+s\overrightarrow{\mathrm{ON}}=(1-s)\times\frac{2}{3}\vec{p}+s\left(\frac{5}{12}\vec{p}+\frac{7}{12}\vec{q}\right)$

$$=\left(\mathbf{\frac{2}{3}}-\frac{1}{\mathbf{4}}s\right)\vec{p}+\frac{7}{12}s\vec{q}$$

R が OQ 上の点であるとき　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=k\vec{q}$　と表せる．

したがって　$\frac{2}{3}-\frac{1}{4}s=0$　　ゆえに　$s=\mathbf{\frac{8}{3}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。